Topología

Conjuntos especiales, axiomas de separación y topología relativa

1. Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) $\overline{A} = X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A)$.
   b) $\mathring{A} = X \setminus (\overline{X \setminus A})$.
   c) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
   d) $A \overset{\circ}{\cap} B = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
   e) $A \overset{\circ}{\cup} B \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$ y la igualdad no se da en general.
   f) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
   g) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ y la igualdad no se da en general.
   h) Si $X = A \cup B$ entonces $X = \mathring{A} \cup \overline{B}$.
   i) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\mathring{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.
   j) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$ y la igualdad no se da en general.

2. Sea X un espacio topológico y A, B subconjuntos de X. Razonar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

   a) $A = \overline{(\mathring{A})}$.
   b) Si $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B) = \emptyset$ entonces $(A \overset{\circ}{\cup} B) = \mathring{A} \cup \mathring{B}$.
   c) A es abierto y cerrado en X si y solo si $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.

3. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto. Demostrar que si A es abierto, entonces $\mathrm{Fr}(A)$ tiene interior vacío. ¿Es cierto si A es cerrado? Poner un contraejemplo en el caso de un subconjunto A arbitrario.

4. Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ con la topología usual:

   a) $A = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$.
   b) El conjunto de Cantor.

5. Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de la recta de Kolmogoroff $\mathbb{R}_K$.

   a) $\mathbb{Z}$ *b)* $(-3, 3]$ *c)* $[5, +\infty)$
   d) $(-\infty, 5)$ *e)* $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *f)* $\{5\}$.

6. Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$.

   a) $\mathbb{Q}$ *b)* $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *c)* $\{-1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$
   d) $\mathbb{Z}$ *e)* $(0, 1)$.

7. Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación del subconjunto

$$A = (-4, -\sqrt{2}) \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, 3) \cup \left\{ \frac{3n + 10}{n + 3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

   en la recta real, la recta de Kolmoroff y la recta de Sorgenfrey.

8. Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$.
   b) $B = \left\{\left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \mid x \neq 0)\right\} \cup \{(0, 0)\}$.
   c) $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
   d) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \mid x \neq 0\right\}$.
   e) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2n} < x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2n-1}\right\}$.

9. Calcular la frontera e interior de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.
   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \neq 0\}$.
   c) $C = A \cup B$.
   d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$.
   e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$.
   f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \leq \frac{1}{x}\}$.

10. Sea X un espacio topológico T_1, $A \subset X$ y $x \in X$. Demostrar que $x \in A'$ si y solo si todo entorno de x contiene infinitos puntos de A. ¿Es cierto esto si X no es T_1?

11. Sea X un espacio topológico T_1. Demostrar que el conjunto de puntos de acumulación de cualquier subconjunto de X es cerrado. ¿Es cierto esto para un espacio topológico arbitrario?

12. Sea X un espacio completamente ordenado dotado de la topología del orden. Demostrar que X es T_2.

13. Estudiar la convergencia de la sucesión $x_n = 1/n$ en $\mathbb{R}$ dotado de la topología cofinita.

14. Demostrar que todo subespacio de un espacio T_i es T_i con $i = 0, 1, 2$.

15. Sea X un espacio topológico, $Y \subset X$ un subespacio y $A \subset Y$ un subconjunto. Demostrar las siguientes afirmaciones:

    a) Si A es abierto en Y e Y es abierto en X entonces A es abierto en X.
    b) Si A es cerrado en Y e Y es cerrado en X entonces A es cerrado en X.

16. Sea $Y = (0, 5]$. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de Y son abiertos y/o cerrados considerando en Y las topologías relativas de Y como subconjunto de la recta real y de la recta de Sorgenfrey:

    a) $(0, 1)$ *b*) $(0, 1]$ *c*) $\{1\}$
    d) $(0, 5]$ *e*) $(1, 2)$ *f*) $[1, 2)$
    g) $(1, 2]$ *h*) $(4, 5]$ *i*) $[4, 5]$

17. Sea $Y = (0, 4] \cup \{5\}$. Estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos de Y son abiertos y/o cerrados en Y con la topología usual:

    a) $(0, 1)$ *b*) $(0, 1]$ *c*) $\{1\}$
    d) $(0, 4]$ *e*) $[1, 4)$ *f*) $(1, 4]$
    g) $[1, 4]$ *h*) $\{4\}$ *i*) $\{4, 5\}$

18. Sean
$$A = \left\{\left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \mid 0 < x < 1\right\} \quad \text{y} \quad B = \{0\} \times [0, 1].$$
    Estudiar el carácter abierto o cerrado de los conjuntos A y B con respecto a $X = A \cup B$.

19. Dar un ejemplo de subespacio discreto de $\mathbb{R}$ con la topología usual que no sea cerrado.